Hoe Galileo Galilei de valwet ontdekte*

Maarten Van Dyck

1 Galilei's valwet

Galilei's valwet stelt dat wanneer objecten in een vrije val een bepaalde afstand afleggen in een bepaalde tijd, dat die afstand dan steeds recht evenredig is met het kwadraat van die tijd. Deze evenredigheid is een gevolg van het feit dat vrij vallende objecten een constante versnelling ondergaan, waardoor er gedurende elk gelijk tijdsinterval een gelijke snelheidsverhoging optreedt: door deze steeds hogere snelheden zullen de afgelegde afstanden veel sneller toenemen dan de tijd – hoeveel sneller wordt uitgedrukt door de valwet. Deze valwet werd door Galileo Galilei ontdekt in de periode tussen 1592 en 1610 en voor het eerst gepubliceerd in zijn *Dialoog over de twee voornaamste wereldsystemen* uit 1632, maar de meest uitgebreide behandeling geeft hij in zijn *Vertogen en wiskundige demonstraties over twee nieuwe wetenschappen* uit 1638 (verder verwijzen we naar deze tekst als de *Discorsi,* met zijn Italiaanse naam).

Voor Galilei waren er reeds andere wiskundige wetmatigheden gekend die het gedrag van fysische objecten karakteriseren: in de astronomie konden de banen van planeten wiskundig beschreven en voorspeld worden, in de mechanica vormde de hefboomwet van Archimedes de basis van een wiskundige behandeling van het functioneren van allerlei machines die gebruik maken van hefbomen, katrolsystemen en tandwielmechanismen, en in de optica waren er ook elementaire wiskundige inzichten bereikt over de voortplanting van licht en de perspectivistische effecten die daarbij optreden. Het belangrijkste verschil ligt in de omstandigheden waaronder deze wiskundige regelmatigheden op te merken zijn. De belangrijkste grootheden die in de optica bepaald moeten worden zijn afstanden en hoeken, in de mechanica kan je de wetmatigheden nagaan door afstanden te meten en te kijken of er evenwicht of onevenwicht optreedt in het systeem, en in de astronomie volstaat het om nacht na nacht de relatieve hoekafstanden tussen de hemellichamen te meten. Enkel in het laatste geval is tijd ook een relevante

*Versie 22 november 2016.

factor, maar het belangrijkste tijdsverloop dat van tel is volgt het natuurlijke ritme van de dagen. Galilei's valwet is de eerste wet waarin veranderingen doorheen willekeurige tijdsintervallen onderwerp worden van een wiskundige behandeling. Het is pas op dit moment dat het tijdsverloop een integraal deel van een wiskundige theorie wordt, en dat de ambitie om de volledige natuurlijke werkelijkheid wiskundig te vatten denkbaar werd.

De ontdekking van de valwet getuigt niet enkel van het eerste moment waarop een particuliere fysische verandering doorheen de tijd succesvol gemathematiseerd werd, haar specifieke vorm was meteen ook één van de belangrijkste sleutels tot het systeem dat later in de zeventiende eeuw zou tonen hoe dit succes uit te breiden naar een veel grotere verzameling van fysische fenomenen. In 1687 publiceerde Isaac Newton met zijn *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (de *Wiskundige principes van de natuurfilosofie*) het werk dat de basis zou vormen van wat tegenwoordig "klassieke mechanica" genoemd wordt. In dat werk introduceerde Newton als tweede axioma of bewegingswet het principe dat een uitgeoefende kracht steeds evenredig is met de versnelling die zij veroorzaakt (in latere notatie wordt dit het gekende $F = ma$). Dit principe heeft in belangrijke mate haar grond in Galilei's valwet: in de periode voor Galilei was de meest courante overtuiging dat een constante kracht zoals gewicht een constante snelheid veroorzaakt, eerder dan een constante versnelling.[1]

Hoe Galilei de valwet ontdekte lijkt op het eerste gezicht een eenvoudige vraag. Ongetwijfeld is het antwoord: door afstanden en tijden te meten en die met elkaar in verband te brengen. Dit eenvoudige antwoord roept echter nieuwe vragen op. Waarom zou iemand deze metingen willen uitvoeren – vanwaar de veronderstelling dat er daar iets interessants uit te leren valt? En gesteld dat je daarvan overtuigd bent, hoe ga je die tijden dan meten op een manier die precies genoeg is en bovendien ook nog eens gecorreleerd kan worden met de bijhorende afstanden? En hoe beslis je wanneer een meting precies genoeg is?

Wie naar de natuurlijke werkelijkheid kijkt wordt geconfronteerd met een grote diversiteit aan fenomenen, elk met hun eigen graad van regelmaat, van weerpatronen tot de verkleuring van bladeren aan bomen en het tollen van een draaitol. De uitdaging

[1] Newtons tweede bewegingswet gaat ook op een andere manier terug op een inzicht van Galilei. Dat de grootte van de versnelling bepaald wordt door de verhouding tussen de uitgeoefende kracht en de massa van het versnelde object impliceert in het geval van de gravitatiekracht dat de versnelling onafhankelijk is van het gewicht van het object, en dat zware en lichtere objecten dus even snel zullen vallen (het zwaardere gewicht oefent een grotere kracht uit, maar daarmee moet ook een evenredig grotere massa in beweging gebracht worden). Dit laatste is een stelling die ook voor het eerst door Galilei verdedigd werd, en waaruit volgt dat er voor vallende objecten niet enkel een vaste verhouding is tussen de afgelegde afstanden en het kwadraat van de tijden, maar dat die verhouding ook voor alle objecten dezelfde is. In wat volgt zullen we op dit hier niet verder op in gaan.

voor wetenschappelijke theorievorming is te achterhalen welke fenomenen het meest informatief zijn. Welke fenomenen kunnen in hun regelmaat op de meest duidelijke manier eigenschappen tonen die ons toelaten om ook andere fenomenen te begrijpen? Hoe kunnen we ervoor zorgen dat ze die eigenschappen ook werkelijk tonen? En gesteld dat we denken hun eigenschappen achterhaald hebben, hoe kunnen we die dan vruchtbaar gebruiken om verdere fenomenen te begrijpen?

Hoe Galilei de valwet ontdekte is het het verhaal over hoe Galilei een begin van een succesvol antwoord op deze vragen wist te formuleren.

2 Voerde Galilei experimenten uit?

Op het eerste zicht is het misschien verrassend dat de vraag of Galilei werkelijk experimenten uitvoerde om zijn valwet aan te tonen de inzet geweest is van een belangrijk wetenschapshistorisch debat in de twintigste eeuw. Centraal daarbij stond de volgende beschrijving die Galilei in de *Discorsi* gaf van een experiment met dat doel:

> In een houten balk of daklijst van twaalf armlengtes[2] lengte, met een breedte van een halve armlengte en een dikte van drie vingers, werd langs de smalste zijde een groeve gemaakt van iets meer dan een vinger breedte; deze werd erg recht gemaakt, en om ze goed proper en glad te houden werd er een stuk perkament ingeplakt dat zo goed als mogelijk proper en glanzend gemaakt was. Hierin deden we een goed gepolijste en propere harde bronzen bal afdalen door de balk te hellen, met één zijde op een willekeurig manier één of twee armlengtes boven het horizontale vlak getild. Terwijl we zoals gezegd de bal lieten afdalen langs de groeve legden we de tijd vast (op een manier die ik zo meteen zal toelichten) die het gebruikte in het afleggen van de hele weg. We herhaalden dit vele malen om zeker te zijn over de hoeveelheid tijd, waarbij we niet meer verschil konden opmerken dan zelfs een tiende van een polsslag.
>
> Nadat we dit gedaan en gestabiliseerd hadden, deden we dezelfde bal afdalen over slechts een vierde deel van de lengte van de groeve; en de tijd van zijn afdaling gemeten, vonden we steeds dat die exact de helft van de eerdere tijd was. En toen we daarna het experiment deden voor andere lengtes, en de tijden voor de hele lengte vergeleken met die voor de halve lengte, of die voor een derde daarvan of voor drie vierde, of, om te concluderen, die

[2] De exacte maat hiervan is niet belangrijk (en ook verschillend per regio), maar een *braccia* of armlengte ("el") is in de grootte-orde van iets meer dan een halve meter.

> voor eender welk deel, dan blijkt uit de experimenten die we wel honderd keer herhaalden, dat de afgelegde afstanden steeds tot elkaar de verhouding hadden van de kwadraten van de tijden, en dit voor alle hellingen van het vlak (en dus ook van de groeve langs dewelke de bal moest afdalen) …
>
> Wat nu de meting van de tijd betreft, we gebruikten een groot vat gevuld met water, op een hoogte vastgemaakt, waaruit door een nauwe tube die verbonden was aan de bodem een smal straaltje water stroomde dat opgevangen werd in een kleine beker gedurende de gehele tijd dat de bal afdaalde in de groeve of doorheen delen daarvan. De kleine hoeveelheden water die op deze manier verzameld werden, werden daarna keer op keer gewogen met een zeer exacte weegschaal zodat de verschillen en verhoudingen van hun gewichten de verschillen en verhoudingen van de tijd aangaven; en dit met zo'n precisie, dat, zoals ik zei, deze handelingen, vele keren herhaald, nooit verschilden met enig merkbaar moment. (Galilei, 1890, vol. 8, pp. 212-213)

Het debat werd geopend door de Frans-Russische wetenschapshistoricus Alexandre Koyré, die na deze passage geciteerd te hebben, opmerkte:

> A bronze ball rolling in a "smooth and polished" wooden groove! A vessel of water with a small hole through which it runs out and which one collects in a small glass in order to weigh it afterwards and thus measure the times of descent (the Roman water-clock, that of Ctesebius, had been already a much better instrument): what an accumulation of sources of error and inexactitude!
>
> It is obvious that the Galilean experiments are completely worthless: the very perfection of their results is a rigorous proof of their incorrection. (Koyré, 1953, p. 224)

Dat Galilei beweerde perfecte resultaten te bereiken met zulke primitieve middelen toont volgens Koyré enkel aan dat hij de experimenten nooit werkelijk uitvoerde! Zoals Koyré in een voetnoot bij deze bewering verduidelijkte, kunnen we het onderscheid maken tussen twee vragen: wat is het proces dat Galilei tot de formulering van zijn valwet leidde? En hoe trachtte hij zijn wet empirisch te ondersteunen? Maar aangezien zelfs de ondersteuning volgens Koyré al volledig imaginair was, meende hij dat de bewering dat Galilei zijn wet op een empirische manier zou hebben gevonden helemaal vergezocht was.

Deze aanval op de empirische gronden van Galilei's valwet paste binnen het kader van de invloedrijke interpretatie die Koyré vanaf de jaren dertig ontwikkelde van het werk van Galilei en van de wetenschappelijke revolutie van de zeventiende eeuw in het algemeen. Volgens hem was dit in de eerste plaats een metafysische revolutie, gesteund op de door Plato geïnspireerde overtuiging dat de werkelijkheid wiskundig van aard moest zijn. Empirische ondersteuning werd pas mogelijk eenmaal er vanuit deze overtuiging voldoende theorie ontwikkeld was (bijvoorbeeld over hoe goede klokken te construeren) om metingen uit te voeren die exact genoeg konden zijn. Galilei's theorieën konden op het moment dat hij ze formuleerde niet meer dan hypothetisch zijn, het resultaat van een rationele gok die achteraf gezien de juiste bleek te zijn. Zelf gaf Galilei inderdaad voorafgaand aan de beschrijving van de experimentele ondersteuning ook een rationele verantwoording voor de hypothese dat bij versnelling van vallende objecten in gelijke tijden gelijke snelheden toegevoegd worden, namelijk dat de natuur steeds op een zo eenvoudig mogelijke manier werkt (Galilei, 1890, vol. 8, p. 197).

In 1961 toonde een Amerikaanse doctoraatsstudent echter aan de hand van een eenvoudige reconstructie aan dat het experiment zoals beschreven door Galilei wel degelijk tot relatief precieze resulaten kan leiden (Settle, 1961). Vanaf de vroege jaren zeventig begon een aantal onderzoekers bovendien een systematische studie van de zogenaamde *Codex 72*, een verzameling manuscriptnoties van Galilei die slechts partieel opgenomen waren in de editie van zijn volledige werken, waaruit bleek dat Galilei effectief verschillende experimenten met hellende vlakken opzette en de resulaten ervan noteerde (zie o. a. Drake (1973)) – al bevatten de bewaarde manuscripten wel geen directe neerslag van het experiment zoals beschreven in de *Discorsi*.[3]

Het is dus een historisch feit dat Galilei experimenten met hellende vlakken uitvoerde en een fysisch feit dat de resultaten van de in de *Discorsi* beschreven experimenten ook relatief plausibel zijn. Kunnen we daaruit besluiten dat het debat beslecht is? Dat hangt af van wat daarvan de werkelijke inzet was. De simpele vraag of Galilei al dan niet experimenten uitvoerde kunnen we beantwoorden. De provocatieve vraag of hij in zijn *Discorsi* een louter imaginair experiment beschreef dat zijn theorie dus onmogelijk empirisch kon ondersteunen kunnen we ook beantwoorden. Maar op de vraag hoe zijn valwet ontdekte hebben we nog geen antwoord. Bovendien zullen we zien dat een directe poging om die vraag te beantwoorden kan helpen om verder na te denken over wat het betekent om te zeggen dat het experiment met het hellende vlak een empirische ondersteuning kon bieden van de valwet.

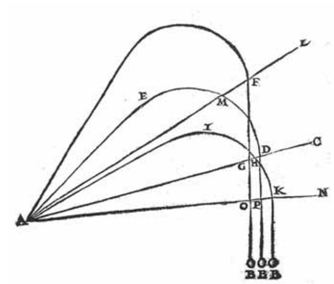
[3]De volledige *Codex 72* is gedigitaliseerd en online consulteerbaar: http://www.imss.fi.it/ms72/index.html.

3 Hoe Galilei de valwet ontdekte: slingers en projectielen

3.1 Versnelling als bijkomstig fenomeen

Galilei begon zijn zoektocht naar de wiskundige structuur van beweginsfenomenen in een traktaat dat hij als twintiger in de jaren 1589-92 schreef maar nooit publiceerde, en dat bekend staat als *De Motu Antiquiora* (Galilei, 1890, vol. 1, pp. 243-419). Het opvallendste daarin is dat hij de stelling verdedigde dat vrije val in essentie een beweging met een uniforme snelheid is. Dit was een onmiddellijk gevolg van zijn keuze om de regelmaat zoals opgemerkt in het drijven en zinken van objecten in vloeistoffen als vertrekpunt te nemen voor die zoektocht. Deze regelmaat was reeds in de oudheid wiskundig beschreven door Archimedes in een theorie van de hydrostatica. Die theorie geeft een eenvoudig criterium om na te gaan of een object zal zinken in een vloeistof: weeg het object en weeg een hoeveelheid van de vloeistof die hetzelfde volume heeft als het object – indien het eerste gewicht groter is dan het tweede zal het object zinken, anders niet. Galilei extrapoleerde uit deze gekende regelmaat een nieuwe hypothese: dat de snelheid waarmee een object zich door een medium beweegt steeds evenredig zal zijn met het verschil tussen deze twee gewichten. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is een object in vrije val doorheen de lucht. Aangezien daarbij zowel het gewicht van het object als dat van een gelijk volume van de lucht niet veranderen tijdens de beweging van het object, zal de snelheid van de vrije val dus ook uniform moeten blijven. Kort samengevat kunnen we stellen dat Galilei een andere invulling gaf dan zijn voorgangers van de bewegingskracht aanwezig tijdens het fenomeen van vrije val (waarbij volgens hem het medium een deel van het gewicht van het vallende object neutraliseert), maar dat hij vasthield aan het idee dat een uniforme kracht een uniforme snelheid veroorzaakt.

Het vraagt geen gesofisticeerde experimenten om op te merken dat vrij vallende objecten versnellen tijdens hun valbeweging. Uit de tekst blijkt dat Galilei zich daarvan goed bewust was. Deze versnelling is volgens hem echter het gevolg van de volgende complicatie. Voordat een object kan beginnen te vallen moest het in de hoogte gehouden worden op een manier die zijn natuurlijke valbeweging tegengaat, en hiervoor moet er een kracht op uitgeoefend worden. Tijdens het begin van de valbeweging is die uitgeoefende kracht nog aanwezig in het object en vertraagt ze de val, maar ze dooft ook gradueel uit. Het is dit gradueel uitdoven van de uitgeoefende kracht dat zich in de versnelling toont, maar eenmaal ze volledig verdwenen is zal het object verder vallen met een uniforme snelheid. De empirisch op te merken versnelling is enkel een bijkomstig fenomeen dat de onderliggende wiskundig structuur moeilijker zichtbaar maakte. Het



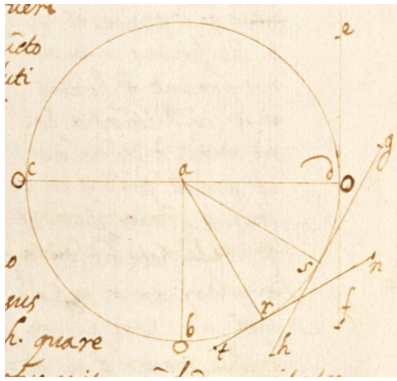
Figuur 1: De banen afgelegd door kanonskogels. (Afbeelding uit de *Nova Scientia* van Nicolò Tartaglia.)

idee van een uitdovende kracht werd al lang voor Galileï geïntroduceerd om te begrijpen waarom elk object dat door een externe kracht in beweging gebracht wordt na verloop van tijd terug tot stilstand komt. Het was dus niet zomaar een ad hoc hypothese waarop Galileï zich enkel beriep om de geobserveerde versnelling weg te verklaren, maar het maakte deel uit van de fysische principes die ruim aanvaard werden.

In *De Motu Antiquiora* behandelde Galilei nog twee andere fenomenen, allebei gerelateerd aan zijn behandeling van vrije val: de beweging van een object op een hellend vlak, en de baan van een projectiel.

Kanonnen werden in de zestiende eeuw steeds frequenter gebruikt in de oorlogsvoering, en de vraag naar de baan afgelegd door een kanonskogel kon dan ook op veel belangstelling rekenen. Galilei nam in de grote lijnen de theorie over van een voorganger, Nicolò Tartaglia (zie figuur 1). Ook hier beriep hij zich het idee dat een uitgeoefende kracht nog een tijdje aanwezig blijft in een object (hier de kanonskogel), maar gaandeweg uitdooft. Initieel hebben we te maken met een gewelddadige beweging die quasi rechtlijnig verloopt, maar nadat de kracht grotendeels is uitgedoofd word de baan afgebogen onder de toenemende invloed van het gewicht, totdat het gewicht de beweging volledig domineert, en we terug met een vrije val te maken hebben.

De introductie van de beweging op een hellend vlak in een traktaat over natuurlijke beweging was een innovatie van Galilei. De belangrijkste reden hiervoor is dat hij dit fenomeen op een gelijkaardige manier kon verklaren als dat van de beweging in een medium: het hellende valk neutraliseert net zoals het medium een deel van het gewicht van een object. Bovendien kon ook hier op een wiskundig exacte manier bepaald worden wat de grootte van dit effect is. Om dit te doen beeldde Galilei zich in dat het object op een hellend vlak in evenwicht gehouden wordt met behulp van een balans met een gebogen arm, wat hem toeliet om het effectief werkzame gewicht van het object te bepalen (zie figuur 2). Aangezien het effectieve gewicht van een object op verschillende hel-



Figuur 2: Bepaling van het effectieve gewicht op een hellend vlak. Een object op hellend vlak tn kan met behulp van de balans car (met gebogen arm ar) in evenwicht gehouden worden door een gewicht in c. De wetten voor een balans met gebogen arm (en wat eenvoudige trigonometrie) leren dat de verhouding van het effectieve gewicht van het object in r tot zijn absolute gewicht dezelfde is als die van de hoogte van het hellende vlak tot de lengte ervan. (Afbeelding uit *De Motu Antiquiora* van Galilei.)

lende vlakken een maat geeft voor de kracht waarmee het object naar beneden tracht te bewegen, kon Galilei hieruit opnieuw conclusies trekken over de snelheid van de resulterende bewegingen door ervan uit te gaan dat deze snelheden in dezelfde verhouding tot elkaar staan als de krachten verantwoordelijk voor de bewegingen. Hoe steiler de helling van het vlak, hoe sneller een object erop zal bewegen, op een exact te bepalen manier.

3.2 De parabolische baan van een projectiel

In 1592 bezocht Galilei zijn mentor Guidobaldo del Monte en voerde samen met hem een klein experiment uit om meer te weten te komen over de vorm van projectielbanen.[4] Ze doopten een bal in inkt en wierpen hem zodanig dat hij in zijn baan langs een schuin dak bewoog en daarop een spoor naliet. Del Monte vatte hun bevindingen samen in zijn notitieboek:

> Indien men een bal boven de horizontale lijn werpt, met een katapult, met behulp van artillerie, met de hand, of met een ander instrument, dan volgt die in het vallen hetzelfde pad als in het stijgen. De vorm ervan is diegene die omgekeerd onder de horizontale lijn een touw maakt waaraan niet ge-

[4] Dat Galilei betrokken was bij dit experiment, waarvan de neerslag te vinden is in een notieboek van Guidobaldo del Monte, werd reeds langer vermoed, maar is voor het eerst overtuigend aangetoond in Renn et al. (2000).

> trokken wordt [en die vrij aan zijn twee uiteinden opgehangen is]. Beide zijn samengesteld uit zowel het natuurlijke als het gewelddadige, en de lijn is op het zicht gelijkend op een parabool en hyperbool. ... (Geciteerd in Renn et al. (2000, p. 314))

Del Monte en Galilei gingen er nog steeds vanuit dat de uitgeoefende, "gewelddagige”, werpkracht in het projectiel aanwezig blijft, en gradueel uitdooft. Ze merkten echter op dat het natuurlijke gewicht van het object van bij aanvang interageert met deze werpkracht, en wel op zo een manier dat het resulterende traject een symmetrische vorm heeft, in duidelijke tegenstelling met de ideeën van Tartaglia die Galilei nog volgde in zijn *De Motu Antiquiora.* Hierdoor werd het mogelijk om ervan uit te gaan dat het volledige traject misschien te beschrijven viel met één unieke wiskundige curve zoals gekend sinds de antieke meetkunde. Indien dat echter het geval is, dan kunnen we de versnelde valbeweging van het projectiel niet langer als louter bijkomstig zien, maar is het blijkbaar een fenomeen dat gekenmerkt wordt door haar eigen wetmatigheid.

Op het moment dat Del Monte zijn notitie neerschreef liet hij nog open of die curve een parabool of een hyperbool was, maar Galilei zou in het decenium dat volgde zonder verdere twijfel voor de parabool opteren. Wanneer we de symmetrie-as van de parabool als y-as nemen en loodrecht daarop een x-as definiëren (bijvoorbeeld de raaklijn in het hoogste punt), dan wordt deze curve gekarakterisserd door een kwadratische vergelijking:[5] $y = x^2$. Indien we de afstanden langs de x-as als tijden zouden kunnen interpreteren dan geeft de parabool ons dus direct de valwet!

Galilei noch Del Monte lijkt deze conclusie getrokken te hebben in 1592 of de jaren onmiddellijk daarna.[6] Om dit te kunnen doen moet het traject van het projectiel geïnterpreteerd worden als de samenstelling van een uniforme beweging volgens de horizontale richting (waardoor gelijke afstanden langs de x-as overeenkomen met gelijke tijden) en een eerst vertraagde en dan versnelde beweging volgens de vertikale richting. Maar Galilei en Del Monte interpreteerden de baan als het resultaat van de samenstelling van een vertragende gewelddadige beweging volgens de richting waarin het projectiel werd weggeworpen en een uniforme natuurlijke beweging volgens de vertikale richting. Het uitdoven van de uitgeoefende kracht dat verantwoordelijk is voor de versnelling in de neerwaartse beweging werd dan wel gekenmerkt door een eigen wiskundige wetmatigheid, maar deze was nog ongerelateerd aan Galilei’s valwet. Het is niet toevallig dat het tijdsverloop nergens expliciet vernoemd werd in de beschrijving die Del Monte geeft.

[5] Deze formulering in termen van cartesische coördinaten en algebraïsche vergelijkingen gebruikt een taal die niet die van Galilei en Del Monte is, maar de ideeën konden evenzeer uitgedrukt worden in hun proportionele en geometrische taal.

[6] Renn et al. (2000) suggereren het tegendeel, maar kunnen daarvoor geen direct bewijsmateriaal aandragen.

3.3 Beweging op hellende vlakken en de isochronie van de slinger

Tien jaar na hun gezamelijke projectielexperiment wisselden Galilei en Del Monte in de herfst van 1602 een aantal brieven uit over een nieuw idee van Galilei. De enig bewaarde brief uit deze correspondentie is de belangrijkste getuige van een cruciaal ogenblik in de ontwikkeling van Galilei's denken. In deze brief verdedigde Galilei zowel een empirische bewering over een nieuw bewegingsfenomeen als een gerelateerde wiskundige stelling.

De empirische bewering gaat over twee loden ballen die aan een even lange draad opgehangen worden, waarmee ze vrij kunnen slingeren. Als de twee ballen, met gestrekte draad, vanop een verschillende hoogte losgelaten worden zullen ze een slingerbeweging maken waarbij de ene een grotere cirkelboog volgt dan de andere. Ondanks dit verschil in de lengte van de baan zullen ze toch synchroon met elkaar slingeren: de langere cirkelboog wordt steeds in dezelde tijd afgelegd als de kortere. Galilei's bewering dat hij geobserveerd heeft dat dit geldig blijft na honderd slingeringen is ongetwijfeld een overdrijving. Bovendien weten we ondertussen dat deze eigenschap van synchronie enkel geldig is voor bewegingen over kleine cirkelbogen – iets wat op empirische gronden reeds benadrukt werd door tijdgenoten van Galilei. Maar er was een goede reden waarom hij ondanks Del Montes scepticisme meende dat het fenomeen dat enkel bij benadering geobserveerd kon worden toch strikt genomen waar is.

Door gebruik te maken van zijn wiskundige analyse van beweging op een hellend vlak in *De Motu Antiquiora* kon Galilei immers een verrassende stelling aantonen. Wanneer in een rechtopstaande cirkel twee punten in de onderste helft van de cirkel genomen worden, zoals bijvoorbeeld de punten r en s in figuur 2, en er vanuit deze punten hellend vlakken geconstrueerd worden die eindigen in het punt waarin de cirkel de horizon raakt (punt b in diezelfde figuur), dan zullen twee ballen die via deze hellende vlakken afdalen hun beweging ook steeds in dezelfde tijd voltooien!

Uiteraard volgen de slingerende ballen en de ballen die via de hellende vlakken afdalen een ander pad. Toch is het plausibel om er zoals Galilei van overtuigd te zijn dat er een niet-toevallige relatie moet zijn tussen beide fenomen van synchrone bewegingen.

Om te beginnen was de slingerbeweging waarschijnlijk onder Galilei's aandacht gekomen door de figuur met behulp waarvan hij de beweging op hellende vlakken wiskundig analyseerde (zie figuur 2). In een tekst over mechanica die hij ergens in de periode 1592-1600 schreef (dus na *De Motu Antiquiora*, maar voor de brief aan Del Monte) nam hij die figuur en de bijhorende analyses van evenwicht op een hellend vlak opnieuw op. Daaraan voegde hij dit maal echter de volgende cruciale opmerking toe (met de indices aangepast om in overeenstemming te zijn met die van figuur 2, wat we ook doen in verdere citaten):

> Je kunt dus zien hoe een gewicht geplaatst aan het uiteinde van lijn ad, neerwaarts bewegend langs de cirkelomtrek $dsrb$, gradueel zijn *momentum* en zijn *impetus* om naar beneden te bewegen ziet afnemen, aangezien het meer en meer ondersteund wordt door de lijnen as en ar.[7] Maar het is niet verschillend om dit zware object te beschouwen terwijl het daalt en nu eerst minder en dan meer ondersteund wordt door de halve diameters as en ar, en dus zo gedwongen wordt om langs de omtrek dsr te bewegen, of om in te beelden dat dezelfde cirkelomtrek $dsrb$ een oppervlak is met deze kromming dat onder het bewegende object geplaatst is, zodanig dat het object, ondersteund door dit oppervlak, gedwongen wordt om langs het oppervlak te bewegen. Aangezien het bewegende object in beide gevallen hetzelfde pad zal volgen, maakt het niet uit of het opgehangen is vanuit het centrum a en ondersteund door de halve diameter van de cirkel, of dat deze ondersteuning is weggenomen en het ondersteund wordt door en beweegt langs de omtrek $dsrb$. … Als het object zich bij het punt s bevindt, dan wordt zijn gewicht gedeeltelijk ondersteund door het circulaire pad dat onder hem ligt, en wordt zijn momentum om naar beneden te bewegen verminderd … maar op het eerste punt van de resulterende beweging is die beweging alsof ze plaatsvond op een hellend vlak dat georiënteerd is zoals de raaklijn gsh, aangezien de helling van de cirkelomtrek in het punt s niet verschilt van die van het hellende vlak … (Galilei, 1890, vol. 2, p. 182)

Volgens een vaak aangehaalde legende zou Galilei de isochronie van de slinger ontdekt hebben terwijl hij als jongeman naar een slingerende kandelaar in de kathedraal van Pisa keek. Zelfs als dit verhaal een kern van waarheid zou bevatten (wat we nooit zullen kunnen achterhalen), dan nog moeten we opmerken dat het maar op het moment is dat hij bovenstaande woorden schreef dat dit fenomeen fysisch relevant werd. Het is door de relatie die hij hier opmerkte tussen een slingerbeweging en bewegingen op hellende vlakken (die telkens georienteerd zijn zoals de opeenvolgende raaklijnen aan de cirkelomtrek) dat de regelmaat in de eigenschappen van de slinger informatief kan worden voor die rechtlijnige bewegingen – en vice versa. Op het moment dat Galilei zijn brief aan Del Monte schreef, startte hij het verstrekkende project om te trachten die potentiële informatie ten volle te exploiteren.

[7] *Momentum* en *impetus* zijn belangrijke termen om Galilei's denken volledig accuraat te begrijpen. Ze mogen in ieder geval niet gelijkgesteld worden met begrippen uit de hedendaagse fysica die met dezelfde termen aangeduid worden.

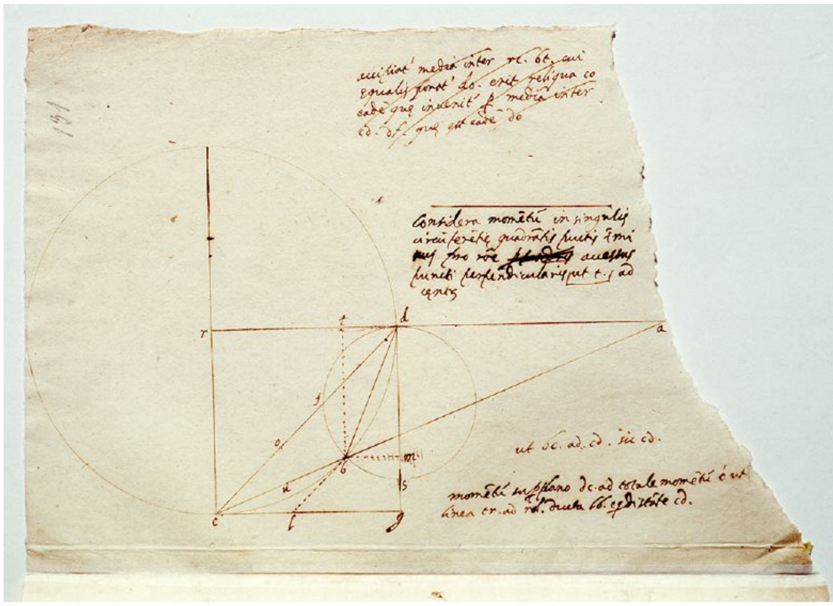
In het net geciteerde fragment raken de hellende vlakken de baan van een slingerbeweging nog langs de buitenzijde. Om de isochronie van de bewegingen over hellende vlakken te bewijzen moest Galilei die vlakken naar de binnenzijde van de cirkelomtrek verplaatsen (wat hij in het eerste bewijs dat hij van deze stelling geeft ook letterlijk doet (zie Wisan (1974, pp. 162-164))). In zijn brief aan Del Monte nam hij dit als vertrekpunt om verder de relatie tussen slingerbewegingen en bewegingen over hellende vlakken te onderzoeken. Nadat hij de stelling had geïntroduceerd dat de bewegingen over hellende vlakken sb en rb even veel tijd zullen vragen, zette hij nog een stap verder. Als er nog een hellend vlak sr geconstrueerd wordt, dan geldt ook dat een object het rechtlijnige traject srb sneller zal afleggen dan rb. Dit alles heeft hij kunnen aantonen "zonder de grenzen van de mechanica te overschrijden," zo stelde hij Del Monte gerust, "maar ik ben niet in staat om te bewijzen hoe de cirkelomtrekken srb en rb in evenveel tijd gepasseerd worden en dit is waar ik naar op zoek ben." (Galilei, 1890, vol. 10, p. 99)

De slingerende ballen en de ballen die afdalen langs een hellend vlak volgen inderdaad een verschillend pad, maar het cirkelvormige slingerpad kan benaderd worden door steeds meer hellende vlakken te introduceren (zoals Galilei toonde door de introductie van het hellende vlak sr, waardoor het rechtlijnige traject srb de cirkelomtrek dichter nadert dan sb). Bovendien toonden de eerste wiskundige resultaten die Galilei wist te bereiken dat het misschien mogelijk was om op basis daarvan eigenschappen van de slingerbeweging aan te tonen. Zijn eerste doel was de isochronie van de slinger, maar de stelling dat het rechtlijnige traject srb sneller afgelegd wordt dan rb suggereert dat Galilei ook erin geïnteresseerd was om aan te tonen dat het cirkelvormige traject van de slinger misschien het pad van de snelste afdaling tussen twee punten is, de zogenaamde brachistochroon.

De *Discorsi* uit 1638 bevat de slechts ten dele succesvolle uitkomst van het project dat in 1602 aangevangen werd. De isochronie wordt er niet in aangetoond, en van de brachistochronie wordt met de nodige voorzichtigheid gesteld dat wiskundig bewezen kan worden dat "het erop lijkt" (*verisimile est*) dat ze geldig is voor de cirkelvormige slinger (Galilei, 1890, vol. 8, p. 263). Toch is het een mijlpaal in de geschiedenis van de fysica, omwille van de valwet die erin geïntroduceerd wordt.

3.4 De valwet en de brachistochroon

De meest markante figuur onder Galilei's intellectuele vrienden was zonder twijfel de geestelijke Paolo Sarpi, officiële theoloog van de republiek Venetië op het moment dat de volledige senaat van de republiek in 1606 geëxcommuniceerd werd en een jaar later



Figuur 3: Folio 131r uit de beroemde *Codex 72* die Galilei's manuscriptnotities over zijn bewegingstheorieën bevat.

overlever van een moordaanslag die hij aan de directe omgeving van de paus toeschreef. Reeds in 1592 was Sarpi op de hoogte van het projectielexperiment van Galilei en Del Monte en discussieerde hij met Galilei over de implicaties daarvan. In 1604 schreef die laatste een brief aan Sarpi waarin hij verwees naar zijn valwet als een fenomeen dat door hem geobserveerd werd, en waarvan de brief lijkt te impliceren dat Sarpi er reeds enige tijd van op de hoogte was (Galilei, 1890, vol. 10, p. 115). Zoals we zullen trachten plausibel te maken was het de slinger zoals behandeld in de brief aan Del Monte die de sleutel bood tot het ontsluiten van dit fenomeen.[8]

Figuur 3 toont waarschijnlijk één van de vroegste pogingen van Galilei om vooruitgang te maken in het project om de eigenschappen van de slingerbeweging aan te tonen op basis van een analyse van de beweging op hellende vlakken (zie Wisan (1974, p. 176)). Hij wist reeds dat de tijd om dc af te leggen gelijk is aan de tijd om bc af te leggen ($t_{dc} = t_{bc}$), en hij wilde bewijzen dat de tijd nodig om dc af te leggen groter is dan de tijd nodig om het rechtlijnige traject dbc af te leggen ($t_{dc} > t_{dbc}$). Wat is nu deze laatste tijd? Het is de som van de tijd nodig om db af te leggen en de tijd nodig om bc af te leggen met de beginsnelheid verkregen door af te dalen via db ($t_{dbc} = t_{db} + t_{bc,d}$).

[8]In de grote lijnen volgen we hiermee de analyse van Wisan (1974), die verrassend weinig navolging gevonden heeft.

Het is plausibel om ervan uit te gaan dat deze beginsnelheid dezelfde is als de snelheid die verkregen zou zijn door af te dalen langs ab (met a het punt op het verlengde van het hellende vlak bc dat zich even hoog boven de horizon bevindt als het punt d).[9] Als we daarvan uitgaan dan is $t_{bc,d} = t_{bc,a}$ en dus $t_{dbc} = t_{db} + t_{bc,a}$. Als het nu klopt dat $t_{dbc} < t_{bc}$ (wat Galilei wilde bewijzen), dan zal steeds gelden dat $t_{bc,a} < t_{bc}$. De enige manier om deze laatste ongelijkheid te begrijpen is door ervan uit te gaan dat de beweging over een hellend vlak noodzakelijk versneld verloopt. Anders gezegd, we hebben nu een strikt wiskundige reden om ervan uit te gaan dat versnelling een essentieel onderdeel van de neerwaartse beweging over hellende vlakken is![10]

Dit is echter nog niet alles. Door een cirkel te construeren met d als hoogste punt en db als koorde kan Galilei een punt f op het hellende vlak identificeren waarvoor op basis van zijn analyse van beweging op hellende vlakken geldt dat de tijd waarin df afgelegd wordt gelijk is aan die voor db ($t_{df} = t_{db}$). Dan geldt dat $t_{dbc} < t_{dc}$ indien $t_{dbc} = t_{df} + t_{bc,a} < t_{dc}$. Als Galileï op dit punt gekomen verdere vooruitgang wilde maken zou het nuttig zijn als hij de tijden t_{df} en t_{dc} met elkaar in verband zou kunnen brengen zodanig dat de ene in termen van de andere uit te drukken is, en als hij tegelijkertijd hetzelfde zou kunnen doen voor de tijden $t_{bc,a}$ en t_{bc}. Als hij immers daarin zou slagen dan zou hij een ongelijkheid hebben waarin enkel de tijden t_{bc} en t_{dc} optreden – en daarvan wist hij reeds dat ze gelijk zijn, waardoor onmiddelijk zou volgen of de ongelijkheid al dan niet geldig is.

De valwet, die de verhouding tussen tijden uitdrukt als een verhouding tussen afstanden, geeft net deze gevraagde verbanden.

In afwezigheid van een document waarop Galilei letterlijk *"eureka"* zou hebben genoteerd, is dit het dichtste dat we kunnen komen bij een historisch plausibel antwoord op de vraag hoe Galilei de valwet ontdekte. Zijn werk over beweging op hellende vlakken vestigde zijn aandacht op de slingerbeweging als een potentieel informatief fenomeen. De meest opvallende empirische slingerfenomenen waren de quasi-isochronie en de

[9] Deze (fysisch correcte) bewering zou Galilei als onbewezen postulaat introduceren in zijn *Discorsi*. Ze kan aannemelijk gemaakt worden door de overweging dat bij beide bewegingen eenzelfde vertikale afstand wordt overbrugd en dat de kracht verantwoordelijk voor de beweging de vertikaal georiënteerde zwaartekracht is, waardoor er over de hele beweging genomen gelijke bewegingskrachten gewerkt hebben die dus dezelfde snelheid genereren (zie Wisan (1974, p. 162)). Het is veelzeggend dat de manier waarop Galilei de bewering ondersteunt in de *Discorsi* gebruik maakt van de eigenschappen van een slinger: de snelheid verkregen door een slingerbeweging zal steeds volstaan om de bol tot dezelfde initiële hoogte te laten terugkeren, wat ook de steiltegraad van het pad – de verkregen snelheden zijn dus onafhankelijk van hoe steil het pad was, zolang de vertikale afstand dezelfde blijft (Galilei, 1890, vol. 8, pp. 205-208).

[10] Dit inzicht introduceert een potentieel probleem in de structuur van Galilei's bewijs. Hij gaat immers uit van de stelling dat $t_{dc} = t_{bc}$, maar om dit te bewijzen ging hij in navolging van zijn ideeën in *De Motu* nog uit van het idee dat een constante kracht een uniforme snelheid veroorzaakt. Gelukkig is het concept van "snelheid" dat Galilei in zijn bewijs gebruikte flexibel genoeg om ook in het geval van een versnelde beweging toepasbaar te blijven. Zie Gautero and Souffrin (1992) voor details.

mogelijke brachistochronie. Als Galilei die eigenschappen wiskundig wilde aantonen via een analyse van bewegingen op hellende vlakken, dan zou hij eerst moeten bepalen wat de verhouding was tussen de tijden nodig om bepaalde afstanden op een hellend vlak af te leggen – een verhouding waarvan hij nu ook om theretische redenen wist dat die niet gekarakteriseerd kon worden door een uniforme snelheid. Op dit moment zou een experiment zoals datgene beschreven in de *Discorsi* (geciteerd in sectie 2) een volledig natuurlijke oplossing voor dit probleem bieden, en het is dus waarschijnlijk dat het effectief aan de basis van de valwet ligt. Indien het experiment resultaten opleverde met de mate van nauwkeurigheid die gesuggereerd wordt door de twintigste-eeuwse reconstructie van Settle (1961) dan zou dit voor Galilei ontgetwijfeld voldoende geweest zijn om ervan overtuigd te zijn dat hij op het goede spoor zat, en om vanaf dit moment de kwadratische relatie tussen tijden en afstanden aan te nemen. Zoals verdere manuscriptnoties uit *Codex 72* tonen (en hij later ook in zijn *Discorsi* zou herhalen), laat dat immers toe om effectief aan te tonen dat $t_{dbc} < t_{dc}$ (Wisan, 1974, pp. 179-184). Deze reconstructie impliceert dat de valwet ontdekt werd in de periode waarin Galilei de brief naar Del Monte schreef, wat in overeenstemming is met het feit dat hij het twee jaar later in zijn brief naar Sarpi als een gekend fenomeen veronderstelde. Bovendien is de hypothese dat hij de kwadratische verhouding experimenteel ontdekte in overeenstemming met het feit dat hij het in die brief omschrijft als een fenomeen dat door hem "geobserveerd" werd.[11]

3.5 De valwet en de paraboolbaan

Zowel de nieuwe experimenten met hellende vlakken die Galilei waarschijnlijk omstreeks 1602 uitvoerde als de oudere met projectielen uit 1592 toonden kwadratische resultaten. In het eerste geval brengen deze expliciet afstanden en tijden in verband tot

[11] Er is een complicatie die we moeten vermelden: zoals eerder aangehaald benadrukte Galilei in de brief aan Del Monte dat hij de stelling dat $t_{dbc} < t_{dc}$ kon bewijzen "zonder de grenzen van de mechanica te overschrijden," wat moeilijk in overeenstemming te brengen is met het idee dat hij in zijn bewijs zou steunen op een empirisch feit dat niet tot de traditionele mechanische kennis gerekend kon worden. Er is een manuscriptnotie waarin Galilei een bewijs geeft van de valwet op basis van $t_{dc} = t_{bc}$ en de stelling dat de tijden voor bewegingen op hellende vlakken met dezelfde hoogte evenredig zijn met de lengtes van deze vlakken (zie Wisan (1974, pp. 188-189)). Er is ook een verder fragment dat suggereert hoe hij had kunnen menen dat hij deze laatste stelling kon bewijzen zonder de grenzen van de mechanica te overschrijden (zie Wisan (1974, pp. 200-201)), maar dit bewijs steunde dan noodzakelijkerwijze op een foutieve toepassing van een aantal elementaire stellingen over uniforme bewegingen. Het is dus goed denkbaar dat hij op het moment dat hij zijn brief aan Del Monte schreef ten onrechte meende dat hij de valwet kon afleiden uit gekende stellingen over bewegingen op hellende vlakken, maar dat hij in de periode tussen deze brief en de brief aan Sarpi ontdekte dat dit bewijs niet geldig was, en zich dus verplicht zag om een beroep te doen op experimenten om de geldigheid van de valwet na te gaan. In ieder geval beschouwt hij het in die laatste brief niet enkel als een geobserveerd maar ook als een niet bewezen feit, aangezien hij expliciet stelt dat hij op zoek is naar een onbetwijfelbaar axioma waaruit hij het zou kunnen afleiden.

elkaar, in het tweede geval betreft het een relatie tussen vertikale en horizontale afstanden. Aangezien de projectielbaan symmetrisch is, en de tweede helft een vallend object betreft, lijkt het voor de hand te liggen om ervan uit te gaan dat de kwadratische relatie die zich daar toont dezelfde is als diegene die het hellende vlak aan het licht bracht. Dat is echter enkel mogelijk indien het zinvol is om de horizontale afstanden als tijden te interpreteren.

Op dit punt krijgt een ander inzicht dat Galilei reeds in *De Motu Antiquiora* formuleerde plots extra relevantie. In de context van zijn analyses van beweging op hellende vlakken had hij zich daar de vraag gesteld wat ze impliceerden voor objecten die zich op een horizontaal vlak bevinden. Om een object op een hellend vlak naar boven te doen bewegen is er steeds een kracht nodig die groter is dan het effectieve gewicht van dat object op het vlak. Zoals we hoger zagen heeft dat effectieve gewicht dezelfde verhouding tot het absolute gewicht als de hoogte van het hellende vlak tot de lengte ervan. Voor een horizontaal vlak is de laatste verhouding nul, en dus zou de kleinst mogelijke kracht in principe moeten volstaan om het object in beweging te brengen. Deze conclusie kan verder ondersteund worden door het volgende gedachte-experiment. Een object dat op een hellend vlak ligt, zal steeds een zekere neiging tot beweging naar beneden hebben, maar deze neiging wordt kleiner als de hoek van het hellende vlak afneemt. Datzelfde object zal ook steeds een zekere weerstand hebben tot het in beweging naar boven gebracht worden, maar ook deze weerstand wordt kleiner als diezelfde hoek afneemt. In het limietgeval waar de hoek nul graden wordt zal er geen neiging tot, maar ook geen weerstand tegen beweging zijn. Vanuit het perspectief van dat object is beweging over een horizontaal vlak dus niet natuurlijk (het gevolg van een interne neiging) en ook niet gewelddadig (het gevolg van het overwinnen van een interne weerstand), maar "neutraal" (Galilei, 1890, vol. 1, p. 299).

Noch in *De Motu Antiquiora,* noch in de tekst over mechanica waar deze analyse herhaald werd, trok Galilei conclusies over de eigenschappen van de beweging die resulteert wanneer een object op een horizontaal vlak in beweging gebracht wordt. Terugkijkend vanuit post-galileaanse fysica kunnen we verwachten dat hij zou concluderen dat die beweging steeds moet voortduren, aangezien het object geen weerstand tegen deze beweging heeft, en er dus ook geen reden is waarom het zou moeten stoppen indien we alle weerstand veroorzaakt door wrijving en dergelijke wegdenken (en die idealizering had hij reeds expliciet geïntroduceerd, omdat het anders ook niet volgt dat de kleinst mogelijke kracht het object in beweging zou kunnen brengen). Dat hij die conclusie toch niet trok heeft ongetwijfeld te maken met het feit dat hij ervan overtuigd was dat een uitgeoefende kracht steeds nog een tijd aanwezig blijft in het object waarop de kracht uitgeoefend werd maar gaandeweg uitdooft. Zou het object dat door die kracht in beweging gebracht was dan niet net moeten stilvallen, aangezien het zelf geen interne inclinatie tot horizontale beweging heeft? Het lijkt erop dat Galilei niet anders kon dan onbeslist blijven over de vraag hoe de neutrale beweging te karakteriseren.

Vóór 1602 had Galilei niet voldoende elementen tot zijn beschikking om dit dilemma in zijn bewegingstheorie op te lossen. Na 1602 was hij er echter van overtuigd dat een natuurlijke neerwaartse beweging gekarakteriseerd wordt door de kwadratenwet. Eenmaal je daarvan uitgaat is het eenvoudig om in te zien dat je dit in verband kunt brengen met de experimenteel vastgestelde paraboolbaan, op voorwaarde dat je die laatste interpreteert als het gevolg van de samenstelling van een vertikaal versnelde beweging en een horizontaal uniforme beweging. Dit geeft je een goede reden om een eenduidig positief antwoord te willen geven op de vraag of neutrale bewegingen voortduren. Na 1602 gebruikte Galilei het hoger beschreven gedachte-experiment inderdaad om direct te concluderen dat horizontale bewegingen uniform zijn.[12] Dit betekent dat hij vanaf dan het idee van de uitdovende kracht liet vallen – eenmaal je dat doet volgt die conclusie immers zonder veel problemen uit het gedachte-experiment. Op dat moment was de transitie van de versnelling van een vallend object van een accidenteel naar een natuurlijk kenmerk volledig voltrokken.[13]

Er is een belangrijke beperking in het gebruik van dit gedachte-experiment om de paraboolbaan wiskundig te analyseren die Galilei nooit achter zich heeft kunnen laten. Enkel wanneer een projectiel horizontaal gelanceerd wordt, zoals bij een bal die over een tafel rolt en aan het einde naar beneden begint te vallen, kon hij zijn argument voor de uniformiteit van de horizontale component inzetten. De baan van een projectiel dat in een hoek met de horizon gelanceerd wordt, zoals bijvoorbeeld het geval was in het experiment met Del Monte, is het resultaat van de samenstelling van een vrije valbeweging met een beweging volgens een niet-horizontale richting. Hoe deze laatste beweging te karakteriseren bleef voor Galilei een raadsel (zie Damerow et al. (2004, pp. 216-236) voor een uitgebreide analyse van zijn gefaalde pogingen om hierop een antwoord te bieden).

[12]De vroegste documentatie die we hebben van Galilei's overtuiging dat zo'n beweging eeuwigdurend zijn komt uit een brief van een leerling van Galilei uit 1607 (Galilei, 1890, vol.10, p. 170).

[13]Het verdwijnen van de uitdovende kracht biedt meteen ook een opening om te begrijpen waarom een vallend object onder invloed van een constant uitgeoefende kracht (het gewicht van het object) een continue versnelling vertoont, eerder dan een constante snelheid zoals Galilei nog meende in *De Motu Antiquiora*. Een momentaan uitgeoefende kracht (zoals diegene die het object op een horizontaal vlak in beweging brengt) resulteert in een beweging met een snelheid die behouden blijft. Als er op dit bewegende object opnieuw dezelfde momentane kracht uitgeoefend wordt zal dit resulteren in een beweging met een verdubbelde snelheid. Door de constant uitgeoefende kracht te begrijpen als een continue opeenvolging van momentane krachten volgt de uniforme snelheidstoename. Het probleem met deze gedachtengang is dat het niet vanzelfsprekend is hoe dit in overeenstemming te brengen met het feit dat de versnelling steeds dezelfde zal zijn, onafhankelijk van het gewicht. Zoals gezegd zullen we bij deze laatste complicatie niet verder stilstaan.

De *Discorsi* bestaat uit vier dagen waarin drie protagonisten met elkaar discussiëren over de twee "nieuwe wetenschappen" die door Galileï ontwikkeld werden. De eerste nieuwe wetenschap gaat over de omstandigheden waarin massieve objecten breken onder invloed van hun eigen gewicht, zoals een balk die in een muur bevestigd is. De tweede nieuwe wetenschap is Galilei's bewegingstheorie, die in de twee laatste dagen van het werk behandeld worden. De derde dag vertrekt van de valwet om te eindigen met de behandeling van de brachistochronie van de slingerbeweging. De vierde dag gebruikt de valwet om verschillende eigenschappen van de projectielbeweging aan te tonen, vertrekkende vanuit de parabolische vorm daarvan. Net zoals de derde dag is de vierde dag geen overdeeld succes. Galilei bewijst er de parabolische vorm van de baan van een projectiel strikt genomen enkel voor het geval van een horizontale projectie, en gebruikt dan niet verder beargumenteerde symmetrieoverwegingen om te suggereren dat de baan van elk ander projectiel ook parabolisch zal zijn.

4 Waaraan ontlenen Galilei's experimenten hun bewijskracht?

Galilei ontdekte zijn valwet waarschijnlijk op basis van een versie van het experiment zoals beschreven in zijn *Discorsi*. Dat wil echter niet zeggen dat we Koyré's scepticisme zomaar volledig aan de kant kunnen schuiven. Daarvoor moeten we eerst de verdere vraag beantwoorden in hoeverre het voor Galilei en zijn tijdgenoten verantwoord was om op de resultaten van dat experiment te vertrouwen.

In het Europese natuurfilosofische netwerk uit de eerste helft van de zeventiende nam de Franse geestelijke Marin Mersenne een bijzondere plaats in. Hij onderhield een immense correspondentie met tal van geleerden, waaronder de filosoof René Descartes. Hij publiceerde ook verschillende collecties met wetenschappelijke ideeën en nam daarin ook de resultaten van diverse experimenten op die hij zelf uitvoerde. Als één van de eersten om de ideeën uit Galilei's bewegingstheorieën verder te verspreiden was de geldigheid van de valwet voor hem een terugkerend onderwerp van reflectie.[14]

Onmiddellijk nadat Mersenne in de *Dialogo* van Galilei uit 1632 de eerste publieke formulering van de valwet had gelezen trachtte hij zelf de versnelling van vallende objecten te meten. Initieel overtuigde de uitkomst van zijn experimenten hem ervan dat die versnelling inderdaad door Galilei's valwet wordt gekarakteriseerd. In de jaren die volgden correspondeerde hij echter regelmatig over dit onderwerp, ook met wiskundi-

[14]De beschrijving van de evolutie in Mersennes ideeën die volgt is gebaseerd op de gedetailleerde analyse in Palmerino (2010).

gen en natuurfilosofen die een alternatieve valwet verdedigden, zoals de jezuïet Honoré Fabri. Deze correspondenten waren op de hoogte van Galilei's stelling, maar meenden dat de experimenten mogelijke alternatieven niet uitsloten. Per slot van rekening waren de empirische resultaten slechts bij benadering in overeenstemming met Galilei's wet, en misschien waren er wel goede theoretische redenen om een andere wet te verkiezen. In het geval van Fabri was dit de overtuiging dat ruimte en tijd bestaan uit uitgebreide maar ondeelbare minima, met als gevolg dat elke versnelling stapsgewijs moet verlopen in plaats van continu. Bovendien kon Fabri aantonen dat voor relatief grote tijdsintervallen (en dat waren de enige die Galilei of Mersenne konden meten) het verschil tussen zijn wet en die van Galilei verwaarloosbaar was.[15] Op een soortgelijke manier wees Descartes Mersenne er herhaaldelijk op dat Galilei uitging van mogelijk betwistbare aannames met betrekking tot de oorzaak van het gewicht van objecten. Indien gewicht veroorzaakt wordt door voortdurende botsingen van zogenaamde "subtiele materie" met massieve objecten, zoals Descartes meende te kunnen aantonen, dan moeten we opnieuw besluiten dat de versnelling van zware objecten niet continu kan verlopen maar schoksgewijs tot stand komt. In tegenstelling tot Fabri, die een alternatieve wiskundige wet naar voor schoof, meende Descartes dat het fenomeen van vrije val niet op een informatieve manier te mathematiseren viel. De botsingen van de ontelbare deeltjes subtiele materie zouden immers telkens lichtjes verschillende effecten met zich meebrengen in steeds veranderende en niet controleerbare omstandigheden. De uitkomst van dit soort debatten was dat Mersenne gaandeweg meer voorzichtigheid begon in te bouwen in zijn verdediging van Galilei's valwet tot hij in 1647 besloot dat we moeten stellen dat er "tot nu toe nog niets bewezen werd over versnelde beweging" (geciteerd in Palmerino (2010, p. 69)).

Het persoonlijke traject van Mersenne toont hoe de overtuigingskracht van experimentele resulaten mee bepaald wordt door de aan- of afwezigheid van alternatieve interpretaties. Of de resultaten "goed genoeg" waren om Galilei's valwet te ondersteunen hangt niet enkel af van de mate waarin ze overeenkwamen met die wet, maar ook van de vraag in hoeverre ze andere wiskundige interpretaties van die experimenten onwaarschijnlijk maakten. Dat is niet alles. Gegeven het feit dat de resultaten slechts bij benadering een wiskundige regelmaat vertonen blijft de vraag open of dit al dan

[15] De valwet van Galilei heeft als gevolg dat opeenvolgende afstanden afgelegd tijdens de valbeweging toenemen zoals de oneven getallen: als we de afstand gevallen na één tijdseenheid als eenheidsafstand nemen, dan zal het object na twee tijdseenheden vier keer zo ver gevallen zijn, na drie tijdseenheden negen keer zo ver, na vier tijdseenheden zestien keer zo ver, … – het opeenvolgende verschil van deze afstanden is drie, vijf, zeven, … Volgens de door Fabri voorgestelde valwet nemen de afstanden toe zoals de gehele getallen. Wanneer de tijdseenheden erg klein gekozen worden zullen voor relatief grote tijdsintervallen de verschillen tussen de verhoudingen van opeenvolgende afstanden verwaarloosbaar worden, en zeker niet gedetecteerd kunnen worden met de middelen die Galilei en Mersenne tot hun beschikking hadden.

niet het gevolg is van een onderliggende wetmatigheid. Met voldoende inventiviteit zal het misschien altijd wel mogelijk zijn om een wiskundige formulering te vinden die de empirische resultaten op een min of meer benaderende manier samenvat.[16] Waarom moeten we dan geloven dat die formulering ons iets kan leren dat meer is dan een samenvatting van deze empirische resulaten zelf? Dat de resultaten van de experimenten bij benadering door Galilei's valwet beschreven kunnen worden, kan ook het gevolg zijn van de toevallige empirische omstandigheden waarin die objecten vallen. Galilei en Fabri meenden dat wanneer we alle storingen veroorzaakt door het medium waarin een object valt konden wegnemen, dat we dan het "zuivere" fenomeen van vrije val zouden observeren, zoals gekarakteriseerd door hun respectieve valwetten. Descartes was er echter op principiële gronden van overtuigd dat er geen "zuiver" fenomeen te isoleren viel van de invloed van het medium. Eerder dan dat de specifieke vorm van die benaderende wetten getuigt van een onderliggende wetmatigheid die potentieel geëxtrapoleerd kon worden naar andere fenomenen was ze volgens hem niet meer dan een artefact van de omstandigheden waaruit er weinig informatiefs te leren valt over de aard van zware objecten.

Misschien was Koyrés stelling dat een metafysische oriëntatie de werkelijke grond vormde voor Galilei's vertrouwen in zijn valwet toch niet zo naast de kwestie. Hoe kon Galilei immers de alternatieve interpretaties van Fabri en Descartes uitsluiten, zonder zelf op niet-empirische aannames te steunen? Het mag dan een feit zijn dat hij experimentele metingen deed van valtijden en afstanden, het zou onverantwoord zijn geweest om te denken dat de resultaten van die metingen goed genoeg waren om tot de geldigheid van zijn valwet te besluiten zonder uit te gaan van bepaalde aannames over de aard van ruimte, tijd en causale wetmatigheden.

We zagen ondertussen echter ook waarom Galilei die metingen deed. Het was in de zoektocht naar een antwoord op een specifieke vraag die hij enkel experimenteel kon beantwoorden. En die vraag vond haar oorsprong in een ruimere vraag naar de relatie tussen de beweging van een slinger en bewegingen op hellende vlakken. Dat er zo een relatie moest zijn werd aan Galilei gesuggereerd door de combinatie van een aantal factoren: de empirische observatie dat de slinger bij benadering isochroon was, de eerdere theorie over beweging op hellende vlakken die hij reeds ontwikkeld had, en het conceptuele inzicht dat een slinger benaderd kon worden door een opeenvolging van hellende vlakken die het cirkelpad volgen. Bovendien bleek het antwoord op die specifieke vraag ook relevant voor een andere vraag die hem reeds bezighield: hoe de vorm van een projectielbaan te begrijpen.

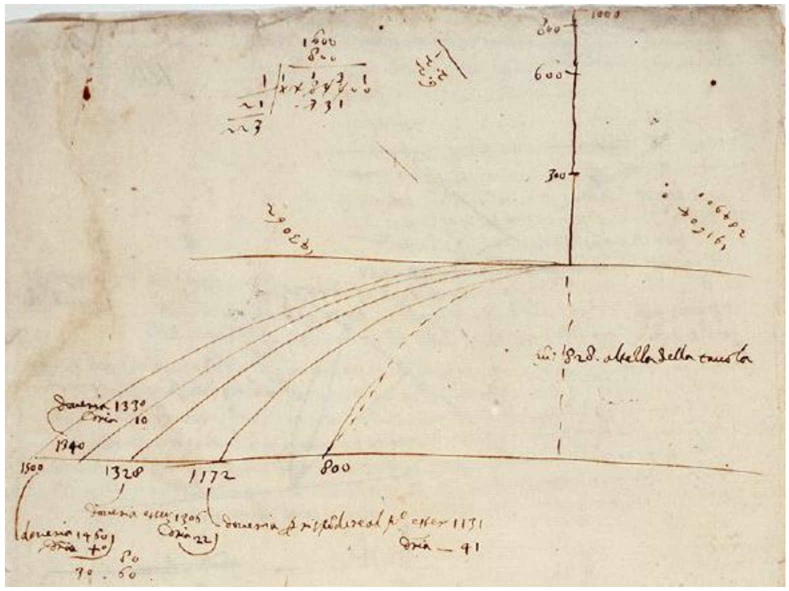
[16]In de eenentwintigste eeuw is inventiviteit zelfs geen voorwaarde meer om aan *curve fitting* te kunnen doen.

Geobserveerde projectielbanen zijn bij benadering parabolisch, slingers van gelijke lengte zijn bij benadering synchroon, en de tijden voor beweging op een hellend vlak zijn bij benadering kwadratisch. Elk van deze individuele observaties laat veel ruimte voor interpretatie. Wat Galilei echter zag is dat de regelmaat in deze fenomenen wederzijds informatief gemaakt kon worden door ervan uit te gaan dat al deze benaderingen getuigen van onderliggende exacte wetten. Deze mogelijkheid om de observaties binnen het kader van één coherent onderzoeksprogramma te interpreteren was niet vanzelfsprekend en daarom ook bijzonder betekenisvol. Galilei's overtuiging dat zijn experiment met het hellende vlak voldoende ondersteuning bood om te vertrouwen op zijn valwet was dus niet enkel gegrond in de directe relatie tussen de resultaten van dat experiment en de vorm van zijn wet. Het experiment ontleende zijn bewijskracht aan zijn plaats binnen het ruimere onderzoeksprogramma waarbinnen het een antwoord bood op een precieze vraag. Galilei meende dat er een exacte wiskundige wet te vinden moest zijn omdat enkel onder die voorwaarde de eigenschappen van de slingerbeweging geanalyseerd konden worden op basis van de beweging op hellend vlakken. En door ervan uit te gaan dat die exacte wet zijn kwadratenwet was, kon hij inderdaad enige vooruitgang boeken in dat onderzoeksprogramma; een vooruitgang die zich bovendien ook toonde in de mogelijkheid om vertrekkende vanuit hetzelfde als zuiver verondersteld fenomeen bepaalde eigenschappen van de baan van projectielen te onderzoeken.

De metafysische oriëntatie van Galiei toont zich dus in zijn besef dat het enkel mogelijk was om de wiskundige samenhang tussen fenomenen te onderzoeken door benaderende empirische wetten te interpreteren als symptoom van onderliggende zuivere fenomenen. Dat betekent ook dat de aanname dat we te maken hebben met een zuiver fenomeen maar verantwoord was in de mate dat ze het effectief mogelijk maakte om werkelijk vooruitgang te boeken in het blootleggen van de samenhang tussen verschillende empirische fenomenen.

De manier waarop de experimentele ondersteuning van Galilei's valwet geworteld was in zijn ruimere onderzoeksprogramma wordt nergens mooier geïllustreerd dan in het meest succesvolle experiment dat zijn neerslag vond in Galilei's manuscripten verzameld in *Codex 72* (zie figuur 4).[17] In dit experiment plaatste Galilei een hellend vlak op een tafel. Hij liet ballen op dit vlak afdalen vanuit verschillende hoogtes (die we noteren als h), waarna ze op de tafel verder bewogen met de snelheid v die ze na tijd t bereikt hadden onderaan het hellende vlak. Aan het uiteinde van de tafel werden de ballen horizontaal geprojecteerd met die snelheid, waarna Galilei noteerde welke horizontale afstand R de ballen afgelegd hadden op het moment dat ze de grond raakten.

[17] De hierna volgende beschrijving van het experiment op folio 116v steunt op Hahn (2002).



Figuur 4: Een fragment van folio 116v uit *Codex 72*.

De geometrie van het hellende valk impliceert dat de afstand s die een bal aflegt op het hellende vlak steeds proportioneel is met de hoogte h. Als de valwet geldt dan moet deze afstand ook proportioneel zijn met het kwadraat van de tijd t die de bal op hellende vlak beweegt. Bovendien nemen in een eenparig versnelde beweging de snelheden toe zoals de tijden, dus moet v ook proportioneel zijn met t. Eenmaal de bal horizontaal is beginnen met deze snelheid zal volgens Galilei's analyse van een projectielbaan de horizontale component van de beweging uniform blijven, dus R zal steeds proportioneel met v moeten zijn (aangezien de valtijd onafhankelijk is van de horizontale beginsnelheid zal de bal steeds na dezelfde tijd de grond raken). Als we al deze proporties samen nemen dan weten we dat:

$$h \sim s \sim t^2 \sim v^2 \sim R^2$$

Door voor verschillende hoogtes h de horizontale afstand R te meten kon Galilei de geldigheid van zijn aannames testen. De kleine afwijkingen die hij vond kon hij plausibel toeschrijven aan verstoringen veroorzaakt door wrijving en luchtweerstand.

Het bijzondere aan dit experiment is dat het Galilei toeliet om een belangrijke bron van imprecisie van het experiment beschreven in de *Discorsi* te elimineren door verschillende elementen uit zijn onderzoeksprogramma tegelijkertijd te testen. In het experiment uit de *Discorsi* vergeleek hij de beweging op een hellend vlak met een ander fenomeen waarvan hij moest aannemen dat het een uniforme tijdmaat bood, en waarbij zich het extra probleem stelde dat die tijdsmetingen gecorreleerd moesten worden met de bewegingen (hoe te garanderen dat de waterklok exact gelijktijdig met de beweging van de bal begint en stopt?). In het experiment van folio 116v is de tijdsmeting intern aan de bestudeerde fenomenen gemaakt, en hoeft er geen externe klok meer gebruikt te worden.

Door uit te gaan van het uniforme karakter van de neutrale beweging kan de afstand R gebruikt worden om de snelheid v te meten, om op die manier te testen of die snelheid inderdaad toeneemt op de manier voorspeld door de valwet. Omgekeerd kan uitgegaan worden van de valwet, waardoor de hoogte h gebruikt kan worden om de snelheid v te bepalen, om op die manier te toetsen of een neutrale beweging effectief uniform is. Impliciet in het experiment zijn er dus twee verschillende klokken (respectievelijk de neutrale beweging en de versnelde valbeweging), die allebei gebruikt kunnen worden om de snelheid v te meten. Dat het experiment goede resultaten oplevert toont aan dat die twee klokken wederzijds gecalibreerd kunnen worden: hun respectieve tijdsmetingen kunnen onderling inwisselbaar gemaakt worden. Dit is het moment waarop de mathematisering van tijdsverloop werkelijk aanvang neemt.

5 Hoe de valwet verder informatief te maken

Als de empirische ondersteuning van de valwet essentieel afhangt van de vruchtbaarheid van Galilei's ruimere onderzoeksprogramma, dan is het slechts partiële succes van de in de *Discorsi* bereikte resultaten bijzonder significant. Als de beperkingen van Galilei's resultaten niet overwonnen konden worden, dan was de ondersteuning van de valwet ook niet bijzonder sterk. De vraag in hoeverre het verantwoord was om op de valwet te vertrouwen kan dus enkel beantwoord worden door te kijken naar de successen van onderzoek na Galilei waarin diezelfde exacte wet verondersteld werd.

De belangrijkste doorbraak op dit vlak vond plaats in december 1659 en werd geleverd door de Nederlandse wiskundige Christiaan Huygens.[18] Uitgaande van dezelfde fysische veronderstellingen als Galilei, waaronder cruicaal de valwet, maar met meer gesofisticeerde wiskundige technieken tot zijn beschikking, was Huygens in staat om aan te tonen dat uit deze veronderstellingen volgt dat een slinger perfect synchroon zou zijn indien hij een deel van het pad van een omgekeerde cycloïde volgt in plaats van een cirkelvormig pad zoals Galilei meende.[19] Bovendien impliceerde Huygens' bewijs

[18] Zie Yoder (1988) en Mahoney (2000) voor gedetailleerde analyses.

[19] Een cycloïde is de curve die ontstaat door een punt te volgen op een cirkel die op een horizontaal vlak rolt. Later in de zeventiende eeuw zou door verschillende auteurs aangetoond worden dat de cycloïde ook de

dat een cirkelvormige slinger enkel dicht bij isochronie blijft voor kleine uitwijkingen, in overeenstemming met wat reeds door Galilei's tijdgenoten geobserveerd werd. In het geval van de isochronie waren de afwijkingen van het veronderstelde zuivere fenomeen (isochronie voor een cirkelvormige slinger) dus niet zomaar toe te schrijven aan verstoringen, maar maskeerden ze een onderliggend relevant fenomeen. Zoals Huygens wist aan te tonen is het empirische feit dat een cirkelvormige slinger alleen voor kleine cirkelbogen isochroon is wel degelijk informatief voor de onderliggende wetmatigheid dat de exacte isochronie enkel geldt voor een cycloïdische slinger.

Door effectief een cycloïdische slinger te construeren, kon empirisch geobserveerd worden dat die inderdaad veel preciezer dan een cirkelvormige slinger synchronie behoudt voor verschillende booglengtes. Bovendien volgde uit het wiskundige bewijs dat de periode van deze slinger exact uitgedrukt kan worden in termen van de lengte van de slinger en een bijzondere grootheid die het fenomeen van vrije val karakteriseert: de afstand die een object in vrije val aflegt gedurende de eerste seconde van zijn beweging – de zogenaamde gravitatieconstante. De periode van een cycloïdische slinger kon empirisch gecalibreerd worden met de astronomische tijd die bepaald wordt door de opeenvolgende passages van een hemellichaam aan dezelfde plaats relatief ten opzichte van aarde (met elke passage komt vierentwintig uur overeen), zodanig dat de slinger perfect astronomische secondes meet. Uit de lengte van deze slinger kon onmiddellijk berekend worden wat de grootte van de gravitatieconstante is. Dit betekent dat de wiskundige klok impliciet in de valwet nu ook voor het eerst op een exacte manier gerelateerd kon worden aan de astronomische klok, die al sinds de aanvang van het leven alle relevante tijdsverloop mat.

Zoals Koyré reeds concludeerde in zijn tekst waarin hij provocatief de waarde van Galilei's experimenten in vraag stelde, bood Huygens' slinger de eerste werkelijk precieze confirmatie voor de valwet. Tegelijkertijd toonde ze ook dat de valwet nog verder informatief gemaakt zou kunnen worden, dit maal voor astronomische fenomenen. Als de tijden gemeten door vallende objecten het gevolg zijn van een beweging onder een constante kracht, dan is het plausibel dat de tijden gemeten door astronomische objecten op een vergelijkbare manier geïnterpreteerd kunnen worden. Dat is echter een ander verhaal, het verhaal over hoe Newton zijn gravitatiewet ontdekte.[20]

Newtons *Principia Mathematica* en Huygens' ontdekking van de isochrone slinger tonen de buitengewone kracht van wiskundige technieken om zoveel mogelijk informatie uit de empirische regelmaat van fenomenen te halen. Huygens was in staat om nieuwe

brachistochroon is.

[20]Dit verhaal is al door verschillende auteurs verteld; zie Smith (2002) en Harper (2002) voor goede vertrekpunten – zie ook Ducheyne (dit volume).

resulaten uit gekende empirische feiten af te leiden door te tonen hoe de wiskundige representatie van die feiten een structuur heeft die verder geanalyseerd kon worden. Op een vergelijkbare manier exploiteerde Newton wiskundige relaties om de beschikbare empirische informatie over astronomische fenomenen op een zo vruchtbare mogelijke manier te interpreteren en systematisch uit te diepen. Galilei's ontdekking van de valwet bleek de sleutel waarmee een bijzonder succesvolle wiskundige informatiemachine opgestart kon worden – een sleutel die niet enkel lag in de specifieke vorm van de wet, maar vooral in de manier waarop die van bij aanvang ingebed zat in een ruimer onderzoeksprogramma.

Referenties

Damerow, P., G. Freudenthal, P. McLaughlin, and J. Renn (2004). *Exploring the Limits of Preclassical Mechanics*. New York, NY: Springer New York.

Drake, S. (1973). Galileo's Experimental Confirmation of Horizontal Inertia: Unpublished Manuscripts. *Isis 64*, 290–305.

Galilei, G. (1890). *Le Opere di Galileo Galilei*. Firenze: Barbera.

Gautero, J.-L. and P. Souffrin (1992). Note sur la démonstration «mécanique» du théorème de l'isochronisme des cordes du cercle dans les Discorsi de Galilée. *Revue d'histoire des sciences*, 269–280.

Hahn, A. J. (2002). The Pendulum Swings Again: A Mathematical Reassessment of Galileo's Experiments with Inclined Planes. *Archive for History of Exact Sciences 56*(4), 339–361.

Harper, W. (2002). Newton's Argument for Universal Gravitation. In I. B. Cohen and G. E. Smith (Eds.), *The Cambridge Companion to Newton*, pp. 174–201. Cambridge: Cambridge University Press.

Koyré, A. (1953). An Experiment in Measurement. *Proceedings of the American Philosophical Society 97*(2), 222–237.

Mahoney, M. S. (2000). Huygens and the Pendulum: From Device to Mathematical Relation. In E. Grosholz and H. Breger (Eds.), *The Growth of Mathematical Knowledge*, pp. 17–39. Dordrecht: Springer Netherlands.

Palmerino, C. R. (2010). Experiments, Mathematics, Physical Causes: How Mersenne Came to Doubt the Validity of Galileo's Law of Free Fall. *Perspectives on science 18*(1), 50–76.

Renn, J., P. Damerow, S. Rieger, and D. Giulini (2000). Hunting the White Elephant: When and How did Galileo Discover the Law of Fall? *Science in Context 13*(3-4), 299–419.

Settle, T. B. (1961). An Experiment in the History of Science. *Science 133*(3445), 19–23.

Smith, G. E. (2002). The Methodology of the Principia. In I. B. Cohen and G. E. Smith (Eds.), *The Cambridge Companion to Newton*, pp. 138–173. Cambridge: Cambridge University Press.

Wisan, W. L. (1974). The New Science of Motion: A Study of Galileo's De motu locali. *Archive for History of Exact Sciences 13*, 103–306.

Yoder, J. G. (1988). *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*. Cambridge: Cambridge University Press.